应用数学的强大威力

数学算法俱乐部 今天

数学算法俱乐部

日期： 2021年05月24日

正文共： 11778字

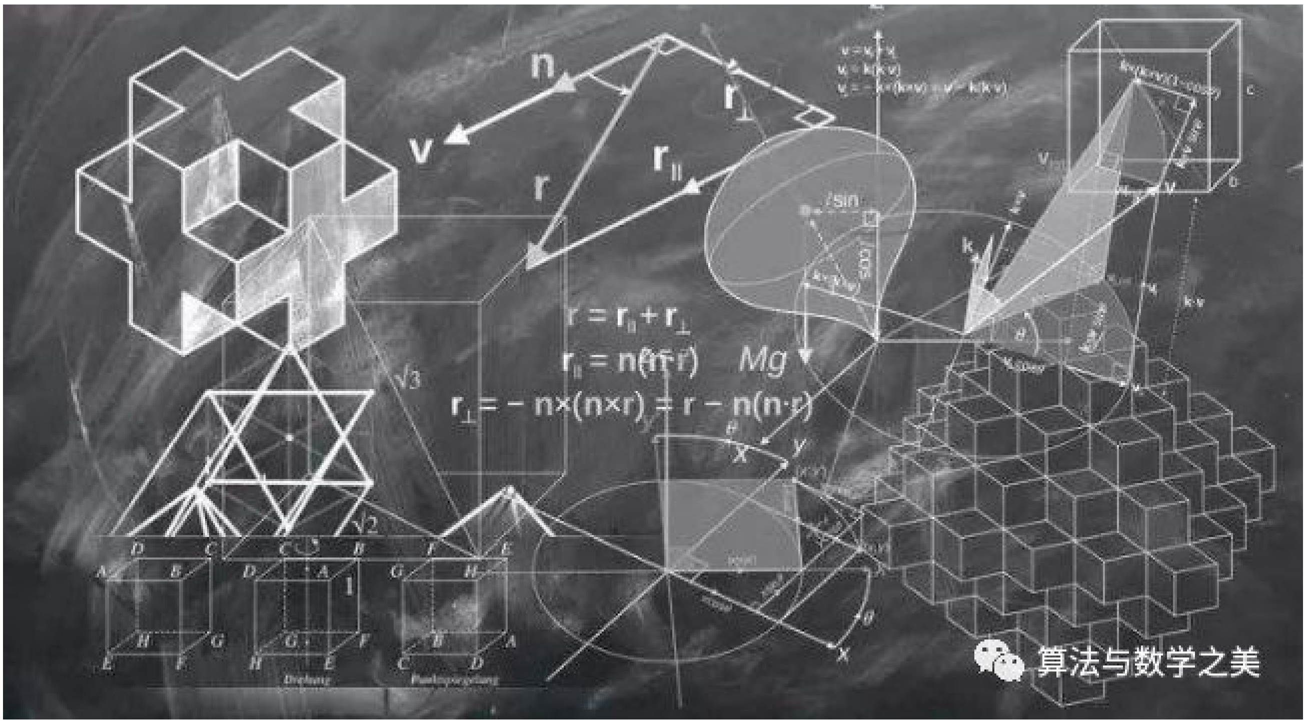
来源： 哆嗒数学网

应用数学思想是科研当中非常重要的一种思维方式以及研究方法。今天我们就借助戴世强教授的三篇有关应用数学的文章来详细了解一下这些问题：

什么是“应用数学思维”？

我们如何在研究中使用应用数学思维？

应用数学思维如何掌握？



最后，我们给出冯卡门在1943年创办美国《应用数学季刊》时，在这本期刊卷首刊登了一篇文章，名字是《用数学武装工程科学》。从这篇文章中可以看到哥廷根学派是如何看待工程科学以及应用数学的。

今天这篇文章的内容有些多。但小编希望能有一篇文章详细的介绍应用数学相关的思想、历史及其在科学中的重要性。希望大家谅解。

第一篇：《应用数学思想》

前几天我们谈了一些科研入门的注意事项，从今天起，我想与青年朋友一起探讨自然科学研究中的常用方法和要领。就从阐述“应用数学过程”开始，我认为这是从事理工科基础研究的一种常规武器，一把利剑。文中对“应用数学过程”作一般描述，并述及若干经常出现的问题。

1978年，著名应用数学家、力学家林家翘教授（中科院外籍院士）提出了解决实际问题的“应用数学过程”，我在1979年他到访清华大学时第一次听他详细讲述了相关内容。他指出，在研究数理科学的实际问题时，经常采用的方法为：

搜集实验、观测资料→建立数学模型→发明数学工具或沿用已有方法解决模型中的问题→验证所得到的结果→总结出普遍规律。

这就是所谓“应用数学过程”。自然科学中，许多基本规律的发现、解析和描述，都或多或少地运用了应用数学过程。

后来，Brown大学的谢定裕教 授到我所讲学，谈及治学之道时，也讲授了这一应用数学过程。并用牛顿建立三大定律为例子加以阐释，牛顿搜集伽利略关于落体运动的实验结果和行星运动的观测数据，特别是了解了关于行星运动的开普勒定律，对物体的运动与作用力之间的关系有了清晰的认识；在此基础上建立了数学模型（物体运动方程）：F=ma等；并发明了微积分，求得了运动方程的解；这些解在实验、观测中得到了验证，最后总结出牛顿三大定律。这是一个完美的“应用数学过程”。1987年，谢定裕先生把上述看法写进了《流体力学》（南开大学出版社）的序言中了。

在此后的研究生教学和本科生教学中，我一再向学生们介绍了这一“应用数学过程”，在关于科研方法的讲座中，也包含了这方面内容。例如，在给研究生讲授流体力学时，我花费很多时间来阐明纳维-斯托克斯方程的导出过程，强调这是在流体力学中实践应用数学过程的绝好例子，特别是其中的数学建模的思路值得效仿。

在实施应用数学过程中，至关重要的是：掌握了足够的实验、观测数据后，从千头万绪的现象中进行梳理、简化，掌握其中的本质要旨，建立合理和可解的数学模型，这是最为艰巨的工作。因此，我们追溯牛顿的学术贡献时，经常把他建立牛顿三大定律放在最重要的地位。

经我留意观察，初涉科研的人们，有不少人不自觉地实施了应用数学过程，而且做得相当出色。如果说有不足之处，主要问题是对应用数学过程认识不清晰和执行得不完整。正如谢定裕教授所指出的，“现代科学的迅速发展，已使一个人很难独立完成某项有意义的工作的整个应用数学过程，……，所以，一个人往往只能从事这一过程的一个或两个环节的工作，……。然而，我们不应忘记整个应用数学过程，应当明了应用数学过程各个环节的相对重要性。”

人们在实施应用数学过程中所出现的问题主要有：

1. **没有充分掌握所研究的问题的实验、观测数据。**尽管由于分工不同，我们不一定亲历亲为地去作实验观测，但必须通过各种调研掌握必要的实际观测资料，并进行仔细剖析，了解工程或科学问题的第一手材料，抓住其中的本质性的东西，为数学建模奠定基础；

2. 对于作沿用的数学模型不了解其源头。人们在科研中常利用现成的模型，但不少年青人对所用模型的来龙去脉不甚了了。例如，在流体力学研究中要用纳维-斯托克斯方程，但不了解这组方程

赖以成立的基本假设（三个本质的假设、三个重要的假设以及其它次要假设），不顾实际情况拿来就用，往往会出岔子；

3. 不善于独立建模。对有些问题，没有现成的模型可供借鉴，必须自己按实际问题来建模。不少年青人的建模能力较差，需要磨练（日后细谈）；

4. 不重视结果的验证。有些年青人给出了问题的解后就“开小差”了，没有在结果的验证上下功夫，也就是说，忽视应用数学过程的第四个环节。有些作理论分析的朋友认为，我已经给你解答了，结果的应用和验证是别人的事情。这种想法很要不得，因为在求解过程中，你引进了各种近似假设，结果是否成立？何时成立？研究者必须责无旁贷地给出明确的说法。

5. 不重视总结规律。我们不是牛顿，也许总结不出牛顿定律那样的大规律，但总能发现一些小规律吧！经常见到年青人的习作中，把公式、数据、图表等一一列出后就“溜之乎也”，这实在是一个坏习惯，也往往会糟蹋了好工作、好结果。我在乐乎博客中已多次提及这一点。最近重读《李政道传》，我发现，他在得到重要问题一些基本结果后，分析、讨论、总结规律的时间甚至长于演绎结果的时间。

必须指出，“应用数学过程”是应用数学和力学界前辈学者总结出来的一种提法，实际上在其它学科门类中可能有类似的提法。我们主要领会其中的精神实质。

总而言之，应用数学过程是理工科科学研究中的一种常规武器，希望青年朋友门好好体会、运用，而且在实践中逐步形成良好的科研习惯。

欢迎广泛地进行讨论。

第二篇：《如何建立数学模型（一）》

在 昨天的博文中谈及了“应用数学过程”，明确指出：在实施应用数学过程中，数学建模起了核心作用。作为数理科学的科研工作者必须学会数学建模，这是管用一辈子的本领。建模方法千变万化，我这里只能讲一个梗概，要学会建模本事，需要再读一些著述，更重要的是边干边学，在建模中学建模。

本文概述数学建模的涵义、过程、分类和一个著名例子。

（1）数学建模的一般涵义

数学建模——根据需要针对实际问题构建数学模型的过程，亦即，通过抽象和简化，使用数学语言对实际现象和实际问题进行近似刻画，以便于更深刻地认识所研究的对象。

数学模型不是对现实系统的简单的复制和模拟，而是经过对现实现象进行分析、提炼、归纳、升华的结果，是以数学语言来正确地描绘现实对象的基本内在特征，从而通过数学上的演绎推理和分析，运用解析、实验（保持相似律成立）或数值求解。

整 个建模过程要注意高瞻远瞩、抓大放小，把握问题的内在本质。当研究问题有了正确的数学描述后，寻找适当的数学工具分析求解。关于求解方法的改进方面，要尽可能使所用的方法精确化、细致化和全面化。必须结合实例，就建模的正确性、有效性、可用性和适用范围进行准确的界定；

对所产生的误差和不确定性进行实事求是的分析；对所得的结果，必须从物理学视角和实际应用角度进行解读。

（2）数学建模的一般过程

首先，基于一系列基本的简化假设，把实际问题中的数学描绘明确地表述出来，也就是说，通过对实际问题的分析、归纳、简化，给出用以描述该问题的数学提法；然后采用数学的理论和方法进行求解，得出结论；最后再返回去阐释所研究的实际问题，总结一般规律，即实现第一章中所述的“应用数学过程”，在数学理论和所要解决的实际问题之间构建一座桥梁。

具体来说，数学建模的步骤如下：

l **通过调研，掌握实际问题的背景材料。**明确研究对象（如物理问题、工程问题）和研究目的，了解相关的数据资料和基本事实（包括已有理论结果、观察结果、观测数据、实验资料等），提出清晰的基本目标，并在实际研究过程中随时准备不断修正预期目标；

l 辨识并列出与问题有关的各主要因素。建立基本假设，简化所研究的问题。明确模型中必须考虑的主要因素，预测、分析它们在问题中的作用，以变量或参数的形式表示这些因素。建模之初通常应最大限度地简化问题，建立最简单的模型，然后不断调整假设，提出修正，使得模型尽可能接近实际；

l 运用物理和数学知识和技巧建立问题中变量之间的关系。通常可以用离散的或连续的数学表达式来描述，例如：比例关系（如：牛顿粘性定律）、线性关系（如：广义牛顿粘性定律、胡克定律等）、非线性关系（如：非牛顿流体的本构关系、物理非线性材料的本构方程）、经验关系（如：反映非光滑管的阻力系数的尼古拉捷规律、水动力学摩阻的Manning公式等）、输入输出原理（如：元胞自动机模型的演进规则）、平衡原理（如：热动平衡规律、捕食者和猎物之间的关系等）、守恒原理（如：能量守恒、质量守恒、动量守恒、KdV守 恒律等）、牛顿运动定律、微分方程或差分方程、矩阵关系、概率关系、统计分布等等（变量之间的关系不一定非要用方程来描述，只要能解决问题，可用各种方法确定问题的物理量之间的关系，例如离散映射关系），从而建立问题的数学模型。常见的表述各物理量之间的关系的有：代数方程，映射关系，差分方程，常微分方程，偏微分方程，积分方程，积分-微分方程等等；

l 进行参数辨识或参数标定。使用观测数据或问题的相关背景知识，辨识出问题中的参数的估计值；设计专门实验，标定参数。参数识辨和标定经常采用实测方法和数理统计方法。由于问题的参数识辨较为困难，所以成功的模型应该是简单的，所涉及参数尽可能地少且容易识辨；

l 运用所得的模型，进行分析求解。采用各种有效的数学工具求解所得到的数学方程等，然后，分析、解释模型的结果或把模型运行的结果与实际观测进行比较，开展进一步的案例分析，验证模型的正确性；

l 总结一般规律。对验证成立的数学模型进行总结归纳，尽可能上升到新的理论高度。

运作要点：

a. 掌握第一手资料；

b.抓住问题的主要因素；

c.建立真实合适的模型；

d.比照实际。

（3）数学模型的分类

按数学表述的形式分：

连续模型；

离散模型；

按表述的确定性分：

确定性模型；

非确定性模型（随机模型）；

混合模型；

按问题的求解步骤分：

正问题模型；

反问题模型；

按数学物理工具分：

基于量纲分析的轮廓模型；

基于数据拟合的经验模型；

基于守恒原理的方程模型；

基于平衡原理的机理模型；

基于运筹优化的规划模型；

基于网络分析的图论模型；

基于复杂性研究的层次分析模型等等。

（4）数学建模的经典范例

哥尼斯堡七桥问题——图论模型的典范

问题：哥尼斯堡城有一条河，现在用七座桥来连接河的两岸A、B和河中两岛C、D（如图3.2所示），试问：可否一次性不重复地走过这七座桥？

模型：1734年，Euler解决了这个问题。他把问题抽象简化为图论中的一笔划问题：数学上可证明：一笔划的基本要求是各点要有偶数条起迄路径，但是本题四点起迄路径均为奇数条，从而不可实现一笔划。即不能一次性不重复走过这七座桥。

以上对数学建模给出了一个概论，日后将继续予以深化叙述。

第三篇：《如何建立数学模型（二）》

我现在问朋友们一个问题：我们什么时候开始接触数学建模的？如果我说，凡是上过一点学的人都或多或少地学过数学建模，你信吗？想一想，我们上小学时，在做稍稍复杂一点的数学应用题时，

例如，著名的“鸡兔同笼”问题，就得通过较为简单的数学建模来求解。到了中学，这样的例子就更多了。所以，我们对数学建模不必有神秘感。现在国内每年要举行各种数学建模比赛，也使这种神秘感大大减少。目前欠缺的是：**在本科和研究生教学中，老师对数学建模的关注和引导不足。**

这里，引述钱伟长先生的一段话：“教学的过程，就在于让学生搞清‘模型’的意义。因为‘模型’反映的是事物的本质，是对客观事物的近似描述。我们要引导学生提出‘模型’，通过抓‘模型’，教给学生一种提出问题、分析问题、解决问题的方法。”（钱伟长，跨越世纪，上海大学出版社，2002，165页）

随着现代科学的发展，各个学科领域相互交叉、融合，特别是数理科学不断渗透到化学、生物学领域，科研中的建模显得越来越重要。

昨天的博文中，概略地讲述了自然科学研究中的数学建模问题。今天想举一个实际例子，来体会数学建模的过程。应博友的要求，试图简述流体力学中的基本方程——纳维-斯托克斯（以下简称为NS方程）的导出过程，这一过程本身就是一个绝好的建模过程。我浏览过不少流体力学教材，尤其是一些工程流体力学的教科书，其中往往把这一过程略过不提，或者未做重点介绍，这实际上是放弃了一个进行建模教学的良好机会，也会使学生难以掌握流体力学的精髓，更糟糕的是养成“知其然，不知其所以然”的不良学习习惯。

大体说来，推导NS方程可采取宏观演绎方法和微观-介观演绎方法，前者采用连续介质假设，通过控制体积或流体微团的分析，建立一个完整的体系；微观-介观演绎方法采用统计物理手段，从速度分布密度所满足的波耳兹曼方程，通过对这一方程的各种形式的取矩来导得NS方程。本文主要讨论前者。

NS方程的孕育

我们先来简要地回顾流体力学的发展史，主要为了了解NS方程的孕育过程。

公元前3世纪，阿基米德（287 - 212BC）发现浮力定律（阿基米德原理），标志着流体静力学的发端；1644年托里拆里（E. Torricell，1608-1647）制成气压计；导出小孔出流公式；1650年帕斯卡（B. Pascal，1623-1662）提出液体中压力传递的帕斯卡原理；1668年，马略特（E. Mariotte，1620 - 1684），出版专著《论水和其它流体的运动》奠定流体静力学和流体运动学的基础。

这时，社会发展产生了发展流体动力学的需求。马略特首次研究了流体产生的阻力；接着，1678年，牛顿（I. Newton，1642-1727）研究在流体中运动物体所受的阻力，并建立牛顿粘性定律；1738年，丹尼尔·伯努利（D. Bernoulli， 1700-1782）出版《流体动力学》，将力学中的活力（能量）守恒原理引入流体力学，建立伯努利定理（伯努利方程）；1752年，达朗贝尔（J. le R. D’Alembert，1717-1783）提出理想流体运动的达朗贝尔佯谬（即在无粘性流体中运动的物体不受阻力；1755年，欧拉（L. Euler，1707-1783）导出流体平衡方程和无粘性流体的运动方程，即欧拉方程，从而建立了理想流体动力学。此时，粘性流体动力学已呼之欲出。

1763年，玻尔达（J-C. Borda，1733-1799）进行流体阻力试验，给出阻力公式，开了粘性流体动力学研究的先河；1777年玻素（C. Bossut，1730-1814）等完成第一个船池模型试验，完全确认了流体中运动物体与速度的平方成正比的结论；接着，迪比阿（P. L. G. Du Buat，1734-1809）做了更细致的研究，写成《水力学原理》。

以上工作为NS方程的导出在实验上和理论上奠定了基础。1822年，纳维（C-L-M-H. Navier，1785-1836）引进连续介质假设，采用流体分子运动的观点，考虑了分子间的相互作用（宏观地表现为粘性），导出粘性流体动力学的动量方程；1845年，斯托克斯（G. G. Stokes，1819-1903）建立了更为准确的粘性流体的连续介质模型，引进了两个粘性系数，更简洁严谨地导出粘性流体动力学的动量方程（纳维 - 斯托克斯方程）。现今的流体力学教科书就基本上采用了斯托克斯的表述形式。

有关上述历史的详情可参看武际可：《力学史》（上海辞书出版社，2010，231～244页）。

导出NS方程的基本假设

经过梳理之后，我们知道，导出NS方程采用了如下基本假设：

1） 牛顿力学假设成立。只讨论流速远小于光速和特征长度远大于原子尺度的情形（Einstein数远小于1，V为特征速度，c为真空中的光速），即不考虑相对论效应和量子效应；相对论流体力学和量子流体力学分别计及这两种效应，不在这里讨论；

2） 连续介质假设成立。仅考虑Knudsen数（即流体的分子平均自由程远与问题的特征长度之比）远小于1的情形，每一宏观小、微观大的流体微团里含有足够多的流体分子，微团紧密地排列着。稀薄气体动力学考虑Knudsen数近于或大于1的情形；在微流动问题中也会出现这一问题；这里不予研究。

3） 热动平衡假设成立。认为运动的流体微团处于热平衡，即分子运动趋于平衡的弛豫时间远小于问题的特征时间；

4） **热力学第一、第二定律**成立（即能量守恒律和熵增定律成立）；

5） **Helmboltz速度分解定理**成立（速度=平动速度+转动速度+变形速度）；

6） 广义牛顿粘性定律成立。假设运动流体中的剪切应力等于流体应变率分量的齐次线性组合（含广义粘性系数81个）。考虑此定律不成立的情形属于非牛顿流体力学范畴；

7） 流体各向同性假设成立。于是，广义粘性系数从81个缩减为2个；

8） Stokes假设成立。即假设流体的第二粘性系数（体积粘性系数）为零，不考虑流体压缩或膨胀中的粘性阻滞效应；

9） 运动流体中温度不是很高且无急剧变化。可近似地认为流体的粘性系数与温度无关。可以认为温度不太高，不会产生电离和离解现象；

10） 流体均质假设成立。不考虑分层流体、异重流及随之而来的浮力等效应。

以上各假设中，前五个是本质的，第六、七个假设经常是必需的，后三个假设则是非本质的，视情况需要，可以丢掉（即存在体积膨胀、存在高温区或电离区、流体非均质——分层流体）。一言以蔽之，纳维-斯托克斯方程适用于非相对论性的、密度足够高的、各向同性牛顿流体运动的描述。在忽略体积粘性系数，假定温度无剧变（即可假定粘性系数为常数）且流体为均质时，方程的形式较为简单。

因此，我们在科研中要应用NS方程时，首先应考虑其成立的假设是否成立。比方说，在研究微电子器件相关的流体力学问题，就需要慎之又慎。

还应注意，狭义地说，NS方程指的是粘性流体运动的动量方程；广义地说，也可包括质量守恒方程（连续性方程）、能量守恒方程（能量方程），这里采用广义说法，实际上讨论的是流体动力学的基本方程。

NS方程的宏观推导

我们应该知道，推导NS方程的出发点是物质的基本守恒律——质量守恒、动量守恒、能量守恒定律；为了使方程简约、可解，还必须辅以流体的本构方程，NS方程通常采用广义牛顿粘性定律为本构方程，这是基于实验的牛顿粘性定律的推广形式。当然，为了使方程组有封闭形式，还要辅以热力学中关于流体的状态方程。这里只谈连续性方程、动量方程和能量方程的宏观推导。

如所周知，科学方法论中的推理形式主要有两种：归纳推理和演绎推理。前者从特殊到一般，后者从一般到特殊。力学工作者更习惯于归纳推理。

先说归纳推理形式。基本思路是：从流体某个体积中质量、力和能量的动平衡。当这一体积很小时（即取为体积元时），相应的方法就是微元法；当这一体积为有限大小时，相应的方法就是控制体积法。若所取的体积是固定的，就对应于流体力学中的欧拉表述思路；若所取的体积随流体运动时，就对应于流体力学中的拉格朗日描述。因此，每个方程有四种推导方法。

在写得好的工程流体力学教科书中，通常采用与直角坐标的坐标面平行的小立方体做体积元。以推导动量方程为例。采用如下的动平衡方程：

体积元内的动量变化率 = 从各个表面流出的动量 + 体积力 + 面力（压力梯度与剪切应力）

这是流体力学中运用牛顿第二定律的表示。

按上述思路，可以导出连续性方程、动量方程和能量方程。它可以有微分形式和积分形式；可以在直角坐标来表示，也可用曲线坐标来表示。（详见吴望一：《流体力学》（上册），北大出版社，1989）。

再说演绎推理形式。先建立一个抽象的量在某个运动体积的变化和输运过程，建立一个一般的定理，现在通称为雷诺输运定理，然后以单位体积的质量（即密度）、动量和能量代入，分别导出各个守恒方程。（详见刘应中、缪国平：《高等流体力学》，上海交大出版社，2002，第一章）。

进一步建模的“减法”和“加法”

有了NS方程或流体力学基本方程组之后，若碰到更简单的情况，就可采取“减法”来建模。例如，NS方程中去掉粘性项之后，就成了欧拉方程。如此等等。

如果碰到更复杂的情况，则采用“加法”，例如，要研究地球流体力学问题，考虑到地球是一个非惯性系，必须在动量方程中加上科氏力项；再如，若要研究湍流，由于存在脉动项，经过雷诺平均后，就可导得RANS方程。这时出现了方程不封闭性问题，就得引入别的假设和方程实质封闭。

从NS方程导出得到的启示

限于篇幅，这里无法涉及细节，甚至来不及说到NS方程的微观-介观推导，不过我们已可得到一些启示：

——数学建模应建立在已有知识的基础上；

——建模须从第一原理出发；

——对于复杂问题的建模必须提出合理的假设，这些假设大多有可靠的实验和理论依据；

——可以采用多种推理凡是和数学形式来建模。

这篇博文的内容稍稍专业一点。看不懂也没有关系，可以略过不读。

我注意到，这一系列博文的读者中不仅有青年朋友，而且有一些资深学者，欢迎大家补充、指正。

写于2010年10月4日

第四篇：冯卡门《用数学武装工程科学》

人们常说，研究数学的主要目的之一是为物理学家和工程师们提供解决实际问题的工具。从数学的发展史看来，事实很清楚，许多重大的数学发现是在了解自然规律的迫切要求下应运而生的，许多数学方法是由主要对实际应用感兴趣的人创立的。然而，每个纯粹数学家都会感到，把数学研究局限于考察那些有直接应用的问题，对这位“科学的皇后”来说未免有点不公道，事实上，这位“皇后”的虔诚的膜拜者对于把他们的女主人贬黜为她的比较注重实际的、一时较为显赫的姐妹的“侍女”，经常感到忿忿不平。

这就不难理解为什么数学家和工程师持有争论不休的分歧意见了。两种职业的代表人物不止一次地表示了这种分歧意见。

数学家：我在坚实的基础上建造了一座大厦——建 立在明确的公设上的定理体系。我深入分析了逻辑思维过程，确定是否存在可以认为是正确的（至少是可能正确的）的论述。我所关心的是，由我自己的思维确切定义的事物之间的函数关系，以及使我得以探索这种函数关系的种种方法，如果你们发现我所建立的概念、逻辑过程或方法能用于你们的日常工作，那我自然感到欣慰。我得到的所有结果任凭你们处置，但是得让我按自己的方式来追求自己的目标。

工程师：你们的老前辈，那些伟大的数学家，他们的意见同你们可不一样。难道欧拉不是既致力于纯粹数学方面的发现，又从事工程装置的理论研究吗？涡轮机、柱的屈曲和打桩的基本理论方面，都有着欧拉的贡献。数学分析的发展是同物理学的发展特别是力学的发展分不开的。很难设想，要是没有为计算运动物体轨迹寻找数学工具的迫切要求，人们的头脑中会孕育有关微分方程的概念。倘若我们假定运动由某些基本的力学关系和几何关系确定，而这些关系在运动的每一瞬间都成立，就会自然而然地产生微分方程的概念。还有，变分法也主要是为解决物理问题而创立的，有时解决这些问题本身就是目的，有时是为了实际应用。十八世纪和十九世纪的前几十年也许是数学科学突飞猛进的黄金时代，那时，纯粹数学与应用数学之间没有明确的界线。大师们把逻辑思维和直观创造力结合起来，创立了一系列方法和定理；大功告成之后，进行抽象思维的数学家着手致力于弥补逻辑推理方面的某些不足之处，把前一时期大师们的丰硕成果加以编纂，使之系统化。

数学家：我觉得你低估了你所说的系统编纂工作的重要性。为了保证正确地应用微积分学和微分方程理论，绝对有必要精确地定义我们所说的极限过程，给出像无穷小、无穷大这样的术语的真正涵义，你说对不对呢？你大概不能把伽利略称为抽象数学家或纯粹数学家吧！也许你还记得，正是伽利略指出了把相等和不等的观念应用于无穷量时必然会出现的矛盾。他注意到，你可以说整数比其平方数的个数多，因为每个平方数都是整数，但整数不全是平方数；你也可以说，平方数和整数的个数相同，这同样也是合理的，因为每一个整数对应着一个平方数。可公度性、可数性、连续统的逻辑分析、集合论以及近代的拓扑学，这些观念的建立是人类思维发展的关键步骤；其中有许多是没有自觉地考虑物理应用而独立地构想出来的。但是，即使从应用的角度看来，也有必要加固我们自己的大厦的基础，也就是说，改善数学的逻辑结构。对级数收敛性条件（即允许进行逐项微分和积分的条件）不作精确的分析，谁也不可能有把握正确无误地运用级数。在具有想象力和直观天赋的人们完成主要工作之后，再开始寻求新发现的牢固基础，这是一种不正确的倾向。达朗贝尔就已经要求把微积分学建立在极限论的基础上了；按你的看法，柯西，勒让德和高斯无疑在富有创造性的数学天才之列，他们为数学从直观到严格的过渡做出了卓有成效的贡献。十九世纪后半叶，数学继续朝着当时的数学家（或许是乐观地）认定的完全合乎逻辑和绝对严格的伟大目标向前发展。然而，除了阐明基本原理之外，那个时期也为应用数学的发展开辟了新的道路。比如说，你提到了微分方程，你们工程师从这一数学分支得益非浅。复变函数理论、微分方程按奇性的分类以及对这些奇性的研究，都是在你所说的系统编纂时期内发展起来的，难道你不认为这些正是建立微分方程这一数学分支的非常重要的步骤吗？这些理论把通过试凑求解微分方程的原始方式变成了全面了解整个领域的系统的方法。

工程师：我同意你的观点，尤其是关于复变函数论的观点。确实，保角变换是解决无数物理问题的一种最有效、最优美的方法。我也同意你关于奇性分析具有根本重要性的看法。事实上，在非正则奇点附近，我们所用的图解法和数值解法肯定会失效或不便于使用，从而必须求助于解析方法。不过遗憾的是，你们数学家有点像对人体疾病比对人体正常功能规律更感兴趣的医生，或者像关注人类思维病理失常而不去研究正常思维过程规律的心理学家。大多数情况下，我们必须研究“性质良好的函数”，希望有实用的方法相当有效地确定它们在某些待定情形中的性质。

数学家：难道你们不会应用我们提出的求解微分方程和积分方程的一般方法吗？如果它们的解由如你所说的“性质良好的函数”给出，那么我看不出还有什么了不得的困难，也不明白你们还要我们干些什么。

工程师：你们的一般定理处理的多数是解的存在姓和解法的收敛性，你可能记得亥维赛说过的俏皮话：“按照数学家的意见，这个级数是发散的；因此，我们或许可以拿它来派点用场。”你们劳师费功、绞尽脑汁来证明解的存在性，而我们从物理上看来，这一点是一目了然的。你们很少花费精力来寻找和讨论实际有用的解；即使这样做了，多数也只是局限于简单情形，比方说，讨论涉及几何形状简单的物体的问题。我来谈谈所谓特殊函数。我承认数学家研究过很多种特殊函数，把它们的数值列成了表，对它们的级数展开式和定积分表示式已经作了详尽研究。可惜，这种函数在工程中应用范围有限。物理学家在探索基本定律时可以选择几何形状简单的试件作实验研究；工程师却不得不直接处理形状复杂的结构，他不能仅仅因为一种结构几何形状简单，应力分布可用特殊函数算出，就退而采用这种结构。而且，大多数特殊函数仅适用于线性问题。过去，为了简单起见，物理学家和工程师往往把他们的问题加以线性化。数学家喜欢这种简化，因为它使优美的数学方法大有用武之地。遗憾的是，随着工程科学向前发展，人们需要得到较为精确的数据和进一步接近物理真实性，这就迫使我们想方设法去解决许多非线性问题。

数学家：嗯，很多现代数学家对于非线性问题极感兴趣。看来，你们迫切需要的是发展适当的近似方法。不过，你对我们证明存在性的批评是不正确的，现代数学中许多存在性的证明远远超过了直观的范围。我也知道，你们工程师非常成功地使用了各种迭代方法，譬如说，要证明一个边值问题的存在性，我们也经常采用迭代法，换句话说，我们跟你们一样，确实也构造了一系列近似解，唯一的区别在于你们只是假定迭代过程可以产生唯一的解，而我们证明了这一点。还有，在我看来，你们用于解弹性力学和结构力学问题的所谓“能量法”，与变分学中的直接方法密切相关，我指的是，不解欧拉 - 拉格朗日微分方程，而直接构造有给定边值的极小化函数的方法。我觉得，在纯粹数学分析与应用数学之间毕竟存在许多共同之处。

工程师：我并不否认这一点，事实上，我一向认为，分析是应用数学的支柱。不过，要是你真正着手把分析应用到实际情形中去，你就会看到，从掌握一种近似方法的一般概念到成功地应用这种方法，还有很多工作要做。比方说，存在着可资利用的时间和人力的问题。做某些类型工作时，我们可以用精巧的机械装置或电动装置，像微分分析仪或电动计算机之类。然而，在大多数场合下，我们必须不借助于这种手段进行计算，这时，光知道近似过程的收敛性就不够了，我们还得确定用哪一种方法能在最短的时间内得到具有给定近似程度的解，必须对逐次近似所改进的准确度做出恰当的估计，所有这些实际问题要求我们进行艰苦的实际研究。我认为，我们确实需要数学家的帮助，来改进我们的直观方法，或许不妨说，对我们的直观方法加以评论和系统化。事实上，要把数学成功地应用到于工程问题，需要数学家和工程师的密切合作。在表面上截然不同的领域里找出作为它们基础的共同的数学关系，这决不是一件轻而易举的事。**打算搞应用数学研究的数学家必须对所涉及的物理过程有相当透彻的了解。另一方面，为了适当地利用数学工具，工程师必须深入钻研数学分析的基本原理，并达到相当高的水平。**把一堆机床杂乱无章地拼凑起来，成不了一个高效率的金工车间。我们知道，在你们的数学宝库里有着非常管用的机床，摆在我们面前的任务是要懂得如何调整、使用它们。

数学家：我觉得你的话有点道理。把你的譬喻引伸一步，为了成批解决工程问题，你们还需要机床设计师——真正的应用数学家。他们的原有经历可以是各种各样的：可以来自纯粹数学界、物理学界或工程科学界，但他们的共同目标是为工程科学提供数学工具。

— THE END —