全国第四届研究生数学建模竞赛

D

题 目 基于 Clark-Wright 算法的邮路规划和邮车调度

本文针对邮路规划与邮车调度问题，建立优化模型，结合 Clark-Wright 算法和 Dijkstra 算法进行求解，模型结果圆满满足题目要求，并求出了所有可能解。

问题一中，对不直接相连的邮局采用 Dijkstra 直接求最短路，用最短路代替邮局间的距离。以 X_1 县为系统，建立优化模型，运用 Clark-Wright 算法求得所有可能解，并采用时间限制和负载限制进行修正，取得最优解。最少需要 3 辆车即可满足该县的运输需求，三辆车的邮路安排分别为：[$X_1 Z_{10} Z_9 Z_8 Z_7 Z_5 Z_6 Z_5 X_1$]、[$X_1 Z_{14} Z_{16} Z_{15} Z_{11} Z_{12} X_1$] 和 [$X_1 Z_{13} Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 X_1$]。耗时分别为 4.70，3.92，4.32 小时，总里程 348 公里，空车损耗 76.6 元，并保证所有邮件当天收寄或送达。

问题二中，首先建立全局的优化模型，但难以求解。为此，我们分三步进行解答。首先，通过全局的时间约束，找到每个县局当使用不同车辆数的调度安排，以县内车辆数和总邮路及耗时的情况评价每个县局，并期望以此评价约束求解全局最优。其次，将县邮局、市邮局、市邮局周围的支局看作骨干网，建立该地市全局的简化模型，采用改进的 Clark-Wright 算法进行求得 7 组可能解。最后，把第二步求得的解和第一步中各个县的情况相结合通过时间约束条件验证所有解，再从中找出最优解。该方法的优点在于，提出了所有满足条件的解，并用 Clark-Wright 算法快速求解。最优解为：15 辆车（5 辆市级车和 10 辆县级车），全部车总邮路 2436Km,总运行成本 7308 元。

1038402 参赛学校 厦门大学

参赛队员姓名 屈小波，王琨，郭迪

一、问题一模型

1.问题重述

以县局X1及其所辖的16个支局Z1, Z2, ……, Z16为研究对象，假设区级第一班次邮车08:00到达县局X1，区级第二班次邮车16:00从县局X1再出发返回地市局D，若每辆县级邮车最多容纳65袋邮件，试问最少需要多少辆邮车才能满足该县的邮件运输需求？同时，为提高邮政运输效益，应如何规划邮路和如何安排邮车的运行？（邮件量见表2，空车率=(邮车最大承运的邮件量(袋)-邮车运载的邮件量(袋))/邮车最大承运的邮件量(袋)，单车由于空车率而减少的收入为（空车率*2元/公里））

2.问题分析

这是一个在时限和负载的限制下实现最小成本的问题。为使县 X1 内运输成本达到最小，邮车的数目应该最小，并且应把每条邮路的空载量控制到最低水平以有效利用邮车。

因为县局到支局每天只有一班车，根据送往各支局的邮件量，以及邮车的载重量，可知所需的邮车数量不低于 3 辆。根据题意，负载限制是邮车载重量（最大可装载邮件袋数）。时间限制是由于区级第一班次邮车 8:00 到达县局，区级第二班邮车 16:00 从县局返回，由于县局分拣邮件 2 次，共需两小时，因此每辆县局邮车的邮路总耗时不能超过 16-8-2＝6 小时。

求所需邮车的最小值，就是每辆邮车在一定的时限内，在满足遍历经过所有支局和邮件运输需求的情况下，同时经过每个支局装卸后的邮件数都不能超载。

3.模型建立

3.1 模型假设

（1）道路情况仅仅通过两个邮局间的里程表示；
（2）当出现少数不能收寄或送达的邮件也满足要求，但应尽量避免。
（3）如果起始与目的邮局间没有直接相连的公路，可以路经别的邮局中转，但可以不收寄或送达邮件。
（4）一个班次的车都是同时发车。

3.2 符号说明

设$\{Z_0, Z_1, Z_2 \cdots Z_{16}\}$表示县局 X_1 和 16 个支局，其中 Z_0 表示县局。

$$\delta_k^j = \begin{cases} 1，若县局X_1派出的第k量车有到达支局Z_j \\ 0，若县局X_1派出的第k量车没有到达支局Z_j \end{cases}, j = 1, 2, ...16;$$

d_{ij}：从邮局 Z_i 到邮局 Z_j 间的距离，$i, j = 0, 1, ...16$；

a_i：县局送往支局 Z_i 的邮件袋数；$i = 1, 2, ..., 16$

b_i：从支局 Z_i 取走的邮件袋数；$i=1,2,......,16$

$$f(i,j,k)=\begin{cases}1,\text{若县局}X_1\text{派出的第}k\text{辆邮车的邮路有经过从邮局}Z_i\rightarrow Z_j\text{这段邮路}\\0,\text{其他}\end{cases},$$

$i,j=0,1,......,16$

$$g(j,k)=\begin{cases}i,\text{若}f(i,j,k)=1\\-1,\text{其他}\end{cases}$$

$Z(j,k)$：第 k 辆车到达邮局 Z_j 并从 Z_j 出发时的运载量，$j=0,1,......,16$；

T：k 往返一趟的时限；
C：邮车最大承载量；
S：每个支局卸载时间；

3.3 基本模型建立

分析问题一可以发现，车辆的数目主要受到以下几个方面约束：

（1）时限约束：①邮件都有自己的时限标准；②对于邮车需要和整个邮政运输流程运行时间衔接好。就本题而言，邮车往返的时间是有限制的。

（2）能力约束：邮车载重能力。具体而言，邮车出发时，返回时，经过每个支局时的运载量都不能超载。

（3）成本费用：综合运输成本包括运输成本、时间成本。

在满足约束条件下，优化目标成为：

(1)总的运输费用最少；

(2)空车率低;

(3)单位邮件所需的全网传递时限最小，即尽可能多的邮件能当天运回县局。

可见，问题一必须从整体的角度出发，找出一种邮路规划及车辆调度计划，使系统的以上多个目标达到最优。因此，我们从派车数、空车率和运输总成本三个方面建立模型。

若以派车数目 f 为优化目标，则 X_1 县全网对应的模型 I 为：

$$\min f=k$$

约束条件为：

$$s.t.\begin{cases} \dfrac{\sum_{i,j} f(i,j,k)d_{ij}}{v} + S(\sum_j \delta_k^j) \le T \\ \sum_j a_j \delta_k^j \le C \\ \sum_j b_j \delta_k^j \le C \\ Z(j,k) = Z(g(j,k),k) - a_i\left(g(j,k)\right) + b_i(g(j,k)) \le C \\ \sum_k \delta_k^j \ge 1 \end{cases} \tag{1}$$

式（1）中，$\dfrac{\sum_{i,j} f(i,j,k)d_{ij}}{v} + S(\sum_j \delta_k^j) \le T$ 表示每辆邮车往返一趟的时间限制；$\sum_j a_j \delta_k^j \le C$ 表示邮车出发时不能超载；$\sum_j b_j \delta_k^j \le C$ 表示邮车返回时不能超载；$Z(j,k) = Z(g(j,k),k) - a_i\left(g(j,k)\right) + b_i(g(j,k)) \le C$ 表示邮车经过每一支局时的运载量不能超载；$\sum_k \delta_k^j \ge 1$ 表示每个支局至少被邮车经过一次。

同时，为提高邮政运输效益，我们可知影响运输成本的因素除了派车的数目外，还有空车率。单车由于空车率而减少的收入为：

$$\sum_{i,j} f(i,j,k)d_{ij} \times \frac{2C - \sum_j \delta_k^j (a_i + b_i)}{2C} \times 2$$

故若以空车率最小为目标，则 X_1 县全网对应的模型 II 为：

$$\min g = \sum_k \sum_{i,j} f(i,j,k)d_{ij} \times \frac{2C - \sum_j \delta_k^j (a_i + b_i)}{2C} \times 2$$

$$s.t.\begin{cases} \dfrac{\sum_{i,j} f(i,j,k)d_{ij}}{v} + S(\sum_j \delta_k^j) \le T \\ \sum_j a_j \delta_k^j \le C \\ \sum_j b_j \delta_k^j \le C \\ Z(j,k) = Z(g(j,k),k) - a_i\left(g(j,k)\right) + b_i(g(j,k)) \le C \\ \sum_k \delta_k^j \ge 1 \end{cases} \tag{2}$$

若同时考虑两个目标，应先考虑派车数目最少，其次再考虑空载量尽量

小，而且往往前者影响更大。例如，现有 7 吨邮件要运，有两个方案可选：方案一是派 1 辆 8 吨车，方案二是派 2 辆 4 吨车。两个方案都是空载量为 1 吨，但显然是方案一的成本低于方案二。故 X_1 县全网对应的运输总成本模型 III 为：

$$\min F_i = Mk + \sum_k \sum_{i,j} f(i,j,k) d_{ij} \times \frac{2C - \sum_j \delta_k^j (a_i + b_i)}{2C} \times 2$$

$$s.t. \begin{cases} \dfrac{\sum_{i,j} f(i,j,k) d_{ij}}{v} + S(\sum_j \delta_k^j) \le T \\ \sum_j a_j \delta_k^j \le C \\ \sum_j b_j \delta_k^j \le C \\ Z(j,k) = Z(g(j,k),k) - a_i\left(g(j,k)\right) + b_i(g(j,k)) \le C \\ \sum_k \delta_k^j \ge 1 \end{cases} \tag{3}$$

其中 M 为一个充分大的正数，迫使求解时先考虑第一个目标，在考虑第二个目标，通常取 M =100 即可。

3.4 基于 Clark-Wright 算法的简化模型

3.4.1 简化模型

上述基本模型考虑全面，但模型过于精细，求解较为困难，必须寻求一种更简化的算法。

我们知道，车辆路由问题的目标是让多辆有负载限制的“车辆”从一个起始地为多个分散的“客户”进行服务，其目标是节约时间，降低费用。这与我们的邮路规划和邮车调度问题非常相似。车辆路由问题有一种通用的高效算法是Clark-Wright算法[1]，故我们提出一种基于Clark-Wright算法的改进算法。我们在介绍Clark-Wright算法后再具体介绍我们的改进算法。

3.4.2 Clark-Wright 算法

Clark-Wright算法基本思路是：先假定从枢纽中心到每个支局都有一辆车运送邮件，这样其初始的路径就有N 条（假定支局为{ $Z = Z_i, i = 1,2,...N$ }。中心点为X1,，即为{ $X_1Z_1X_1, X_1Z_2X_1, \cdots, X_1Z_NX_1$ }，如图1-1，然后以路由里程节余为判据，进行路径的合并，直到没有路径再能合并为止，形成最终的几条路径。

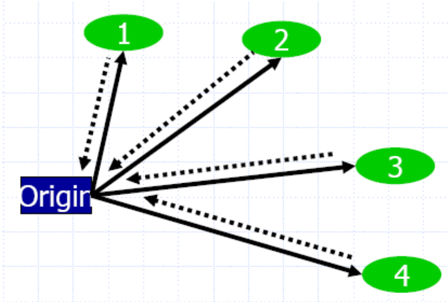


图1-1

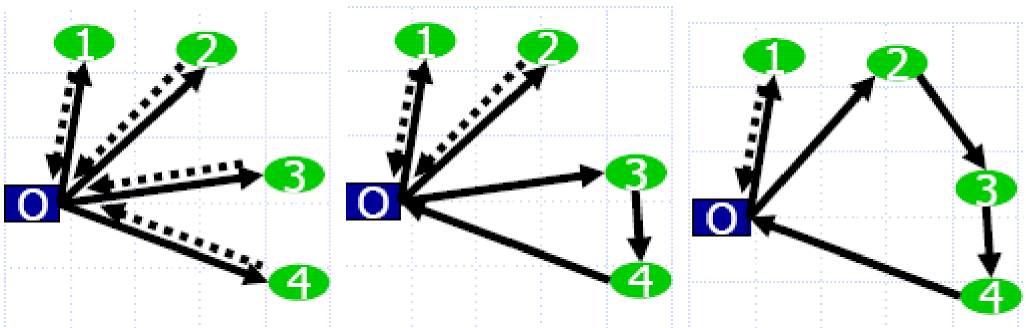
关于节余的计算如图1-2所示，从 $X1$（枢纽中心）到 $(Z_i, i=1,2\cdots5)$ 各有一条邮路

$X_1Z_1X_1, X_1Z_2X_1, \cdots, X_1Z_NX_1$， c_{ij} 为 i 与 j 间的最短路径。我们考虑如果一辆车既访问又访问而不破坏时限和负载约束条件的话，则可将上述两条邮路合并为一条，此时，其所节约的里程为：

$$Savings = c_{i0} + c_{oj} - c_{ij}\text{，}\quad \text{if} \quad 2c_{0i} + 2c_{0j} > c_{0i} + c_{j0} + c_{ij} \tag{4}$$

下面举一个简单的例子。根据表1最短路径矩阵，

S(1,2) = 10 + 15 –8 = 17
S(1,3) = 10 + 19 –23 = 6
S(1,4) = 10 + 22 –35 = -3
S(2,3) = 15 + 19 –12 = 22
S(2,4) = 15 + 22 –21 = 16
S(3,4) = 19 + 22 –5 = 36



(a)tour=132　　(b)tour=96　　(c)tour=74

图1-2 根据路由里程节余合并路由过程

表1-1 最短路径矩阵

i\j	0	1	2	3	4
0		10	15	19	22
1			8	23	35
2				12	21
3					5

3.4.3 基于 Clark-Wright 算法的简化模型

Clark-Wright 算法简单高效，但我们的模型还不能用它直接求解，这是因为在题目附录表所给数据中，有一些邮局之间的距离是缺失的，原因可能是因为这两个地方没有直达公路，如果认为这两点的距离是无穷大，显然是不合理的，因为所有的点都是连通的，由图论知识，我们已知“连通图中任意两点都有一条道路相连”，所以对任意两个没有直达公路的邮局，我们可以求它们之间的最短路径。这个工作我们利用最短路径算法 Dijkstra 来解决，从而我们可以构造出一个完整的包括任意两点之间距离的路程表。

另外，在 Clark-Wright 算法中设定每个支局只送出邮件或只接受邮件，而我们的每个支局既送出邮件，又接收邮件。这就要求邮车出发时不仅要满足邮件待运量，而且每到一个支局交换邮件后的载重量虽然略有波动，但也不能超出最大承运量。

为此，我们提出一种改进的算法，首先用最短路径算法 Dijkstra 算出路程表里那些缺失的数据，以其他的折线路程来代替直达路程。如表 1-2 和表 1-3 所示。

表 1-2　X1 县内任意两邮局的距离（inf 代表不直接相连）

	X1	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16
X1	0	27	44	17	11	27	42	Inf	Inf	Inf	20	25	21	21	18	27	Inf
Z1	27	0	31	27	49	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	52	21	41	Inf	Inf
Z2	44	31	0	19	Inf	27	32	Inf	Inf	Inf	47	Inf	Inf	Inf	50	Inf	Inf
Z3	17	27	19	0	14	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	30	Inf	Inf	Inf	31	Inf	Inf
Z4	11	49	Inf	14	0	13	20	Inf	Inf	28	15	Inf	Inf	Inf	15	25	30
Z5	27	Inf	27	Inf	13	0	9	21	Inf	26	26	Inf	Inf	Inf	28	29	Inf
Z6	42	Inf	32	Inf	20	9	0	13	Inf	32	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	33	Inf
Z7	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	21	13	0	19	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf
Z8	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	19	0	11	20	Inf	Inf	Inf	Inf	33	21
Z9	Inf	Inf	Inf	Inf	28	26	32	Inf	11	0	10	20	Inf	Inf	29	14	13
Z10	20	Inf	47	30	15	26	Inf	Inf	20	10	0	8	Inf	Inf	14	9	20
Z11	25	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	20	8	0	23	Inf	Inf	14	Inf
Z12	21	52	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	23	0	27	22	Inf	Inf
Z13	21	21	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	Inf	27	0	Inf	Inf	Inf
Z14	18	41	50	31	15	28	Inf	Inf	Inf	29	14	Inf	22	Inf	0	11	Inf
Z15	27	Inf	Inf	Inf	25	29	33	Inf	33	14	9	14	Inf	Inf	11	0	9
Z16	Inf	Inf	Inf	Inf	30	Inf	Inf	Inf	21	13	20	Inf	Inf	Inf	Inf	9	0

表 1-3　X1 县内任意两邮局的距离（采用 Dijstra 算法优化）

	X1	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16
X1	0	27	44	17	11	27	42	44	40	30	20	25	21	21	18	27	36
Z1	27	0	31	27	49	51	58	71	67	57	47	52	52	21	41	52	61
Z2	44	31	0	19	33	27	32	45	64	53	47	55	57	52	50	56	63
Z3	17	27	19	0	14	27	34	47	49	39	30	37	38	38	31	38	44
Z4	11	49	33	14	0	13	20	33	35	28	15	23	32	32	15	25	30

Z5	27	51	27	27	13	0	9	21	37	26	26	34	45	45	28	29	38
Z6	42	58	32	34	20	9	0	13	32	32	35	43	52	52	35	33	42
Z7	44	71	45	47	33	21	13	0	19	30	39	47	65	65	48	44	40
Z8	40	67	64	49	35	37	32	19	0	11	20	28	51	61	34	33	21
Z9	30	57	53	39	28	26	32	30	11	0	10	20	41	51	29	14	13
Z10	20	47	47	30	15	26	35	39	20	10	0	8	31	41	14	9	20
Z11	25	52	55	37	23	34	43	47	28	20	8	0	23	46	22	14	23
Z12	21	52	57	38	32	45	52	65	51	41	I31	23	0	27	22	33	42
Z13	21	21	52	38	32	45	52	65	61	51	41	46	27	0	39	48	57
Z14	18	41	50	31	15	28	35	48	34	29	14	22	22	39	0	11	20
Z15	27	52	56	56	25	29	33	44	33	14	9	14	33	48	11	0	9
Z16	36	61	63	44	30	38	42	40	21	13	20	23	42	57	20	9	0

在模型中，我们通过约束条件来确定 Clark-Wright 算法中的邮车容量上限。对于时限约束，根据题意，县局邮车由于往返总时限为 6 小时，每个支局的卸载时间为 5 分钟，以三辆车为例，平均每辆车经过 5 个支局，则途中的时限约为 $5\frac{7}{12}$ 小时，车速为 30 公里/小时，因此车的最大里程约为 165 公里。我们对最大里程规定上下限后，可以减小解的搜索范围，提高算法效率。并可以在 165 公里上下波动，以寻求更优的解。

4. 模型求解

此改进算法的主要步骤如下：

（1）若县局与支局没有直达公路，即，先计算出两点的最短路径，并代替县局到支局的距离。

（2）假定从到每一个支局均有专门的车辆运送，则初始路径为：

$\{X_1Z_1X_1, X_1Z_2X_1, \cdots, X_1Z_NX_1\}$；

（3）将每两点（支局）之间如果合并在一条路径中所产生的里程节余 s_{ij} 计算出来$\{ s_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots N \}$；

（4）将所有 s_{ij} 按由大到小的顺序排列$\{ s_{ij} \}$；

（5）令 t_{ij} =1 表示点y和点z已经合并在一条路径上，t_{ij} =0表示两点还没有合并在一条路径上，若点 i 需要专门车辆运送，则 t_{io} =2。在初始路径中，所有点的 t_{io} =2；

（6）设一指针p指向$\{ s_{ij} \}$最左边的（即最大的）一个；

（7）指针p指向的所对应的两点按是否满足以下几点判断它们所在的路径能否合并为一条路径；

a. $t_{i0}>0$ 且 $t_{j0}>0$（判断 i 点或 j 点是不是各自所在路径的中间站，若是则不合并）；

b. 点和点必须不在同一条路径中（在程序设计中可设标志判断）；
c. 合并后，时限及负载等约束条件能否满足；
d. 其他约束条件。
（8）若（6）中条件不满足则不合并，指针p指向下一个，若所指为空，转向（10），否则转向（6）；
（9）若（6）中条件满足则合并路由，并进行如下更新：

a. 令 t_{ij}=1；

b. 按公式 $\sum_{j=0}^{i-1} t_{ij}+\sum_{j=j+1}^{N} t_{ij}=2$ 计算出其他的 t_{ij}；

c. 计算出各条路径此时的运载量 Q_k（可由各点所需运送量相加而得）；

（10）指针P指向下一个，若p指向空，则转向(10)，否则转向（6）；
（11）算法结束。

5. 结果及分析

通过 Matlab 编程实现 Dijkstra 和 Clark-Wright 算法，最终结果是 $k_{\min}=3$，即最少需要 3 辆邮车才能满足该县的邮件运输要求。一共得到 3 组解如下：

表 1-4 问题一的解

	路由规划	路线里程（公里）	邮件超载量（袋）	总耗时（小时）	出发携带邮包数（袋）	总里程(公里）
第一组解	$X_1Z_{10}Z_9Z_8Z_7Z_6Z_5X_1$	109	4	4.13	64	331
	$X_1Z_{14}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}X_1$	105	0	3.92	61	
	$X_1Z_{13}Z_1Z_2Z_3Z_4X_1$	117	0	4.32	51	
第二组解	$X_1Z_2Z_5Z_6Z_7Z_8Z_9X_1$	153	5	5.6	62	386
	$X_1Z_{12}Z_{11}Z_{15}Z_{16}Z_{10}X_1$	107	0	3.98	57	
	$X_1Z_4Z_{14}Z_3Z_1Z_{13}X_1$	126	0	4.62	57	
第三组解	$X_1Z_{10}Z_9Z_8Z_7Z_6Z_5X_1$	109	4	4.13	64	331
	$X_1Z_4Z_{14}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}X_1$	113	5	4.27	65	
	$X_1Z_{13}Z_1Z_2Z_3X_1$	109	0	3.97	42	

5.1 第一次修正

注意到这些解中有些邮路的某两点之间是不能直达的，因为我们在使用Clark-Wright 算法之前先算出了任意两点间的最短距离。因此对这两点应该用最短路径，即需要增加中间节点来修正原来的解。增加的中间节点邮车只是经过，并不停留卸载邮件，所以不影响每条邮路的总里程，携带的总邮包数和到哪些支局停车卸载邮件。

第一组解中：

$X_1Z_{14}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}X_1$ 改为 $X_1Z_{14}Z_{15}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}X_1$，到 $Z_{14}Z_{15}Z_{16}Z_{11}Z_{12}$ 这些支局停车卸载邮件；

第二组解中：

$X_1Z_2Z_5Z_6Z_7Z_8Z_9X_1$ 改为 $X_1Z_2Z_5Z_6Z_7Z_8Z_9Z_{10}X_1$，到 $Z_2Z_5Z_6Z_7Z_8Z_9$ 这些支局停车卸载邮件；

第三组解中：

$X_1Z_4Z_{14}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}X_1$ 改为 $X_1Z_4Z_{14}Z_{15}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}X_1$，到 $Z_4Z_{14}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}$ 这些支局停车卸载邮件；

5.2 第二次修正

仔细观察可以发现，Clark-Wright 算法并没有找到所有全局最优的解答，只找到所有可能解。为验证解的正确性，我们从以下几个方面进行验证。

（1）时间限制：

$$\frac{\sum_{i,j} f(i,j,k)d_{ij}}{v} + S(\sum_{j}\delta_k^j) \le T$$

T 代表每辆车邮路上的耗时上限。本题中，T＝6 小时。

经验证，每条邮路的总耗时都小于 6 小时，因此每组解都满足时限。

（2）负载限制：

这几组解之所以均超出邮车负载限制，即邮车到达某一支局后会超载，究其原因是：Clark-Wright 算法假设每个支局所需运送的邮件不超过单辆邮车的运载能力（如果超过，我们将它虚拟成二个（或更多个）支局以使其需要运送的量不超过车辆的负载能力），支局位置相同。所以我们求得的解表示的意义是某些发生超载的点位置不变，但要走两次或多次。

受此启发，我们认为邮车可以去绕行某些支局，在所要去的支局集合中改变某些支局的顺序，比如先去邮包增量为负数的支局，再去邮包增量为正数的支局，这样来避免邮包总量超载。当然为使总里程增加少一些，掉换次序的支局应该比较近。以此为原则，我们对局部解在路线和次序调整，保证尽量多的邮件能收寄或送达。

（1）第一组解

第一条邮路改成：

$X_1 \to Z_{10} \to Z_9 \to Z_8 \to Z_7 \to Z_5 \to Z_6 \to Z_5 \to X_1$，

这样就不会超载，单里程数比原来增加了 21＋9－13＝17（公里），总里程数为 348 公里，但仍然满足时限要求。

最后我们得到的优化解是：

$$[X_1Z_{10}Z_9Z_8Z_7Z_5Z_6Z_5X_1, X_1Z_{14}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}X_1, X_1Z_{13}Z_1Z_2Z_3Z_4X_1]$$

此时应空车率而减小的收入为：

$$\min f=\sum_k\sum_{i,j} f(i,j,k)d_{ij}\times\sum_{i,j} f(i,j,k)\times\frac{2C-\sum_j \delta_k^j(a_i+b_i)}{2C}\times 2$$

$$=(\frac{1}{130}\times 126+\frac{15}{130}\times 105+\frac{28}{130}\times 117)\times 2$$

$$\simeq 76.6(\text{元})$$

此解完全符合时限和负载的限制，并将所有邮包运回县局，满足题目要求。

（2）第二组解

第一条邮路有超载现象，我们观察每个支局的邮件增量，发现邮件增量为负数的支局已经放在了前面，所以已经没有改善的空间。而且总里程数大于第一组解，因此不如第一组解优。

（3）第三组解

第一条邮路也改成：

$$X_1\to Z_{10}\to Z_9\to Z_8\to Z_7\to Z_5\to Z_6\to Z_5\to X_1$$

这样就不会超载，单里程数比原来增加了 21＋9－13＝17（公里）。

第二条邮路超载数为 5，原因是出发时已经超载，所以已经没有改善的空间，也不符合要求。总里程数和第一组解相同。

算法中，我们也得到很多组邮车数大于 3 的解，虽然空车率会对总运输成本有影响，但车的数量是主要因素。因此我们这些解肯定不如第一解优。

5.3 最优解

综上所述，最优解为第一组解，即：总里程为 348 公里，总耗时为 12.93 小时。因空车率而减小的收入为 76.6 元。

表 1-5 最优解

	路由规划	路线里程（公里）	邮件超载量（袋）	总耗时（小时）	出发邮包数（袋）
最优解	$X_1Z_{10}Z_9Z_8Z_7Z_5Z_6Z_5X_1$	126	0	4.70	64
	$X_1Z_{14}Z_{16}Z_{15}Z_{11}Z_{12}X_1$	105	0	3.92	61
	$X_1Z_{13}Z_1Z_2Z_3Z_4X_1$	117	0	4.32	51

二、问题二模型

1. 问题重述

（2）如果起始与目的邮局间没有直接相连的公路，可以路经别的邮局中转，但可以不收寄或送达邮件。
（3）在相同的路线上完成同样的运送任务即为相同的邮路，邮路是有向的，相同的邮路的任务、方式都得相同。
（4）一个班次的车都是同时发车。

3.2 符号说明

设：Z_i 表示县局 X_{i-73}，　　$i=74,75,76,77,78$.

$$\delta_k^j=\begin{cases}1，若市局D派出的第k量车有到达第Z_j分局；\\0，其他；\end{cases}\qquad j=58,59,......78;$$

$$\delta_k^j(\lambda)=\begin{cases}1，若县局X_{\lambda-73}派出的第k量车有到达第Z_j分局；\\0，其他；\end{cases}\quad \lambda=74,75,76,77,78$$

X_{ij} : 分局 Z_i 到分局 Z_j 之间的距离。$i,j=1,2,......,78$

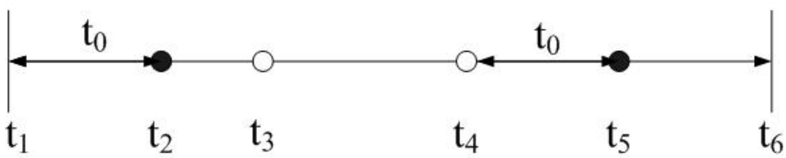
$$f(i,j,k)=\begin{cases}1,若市区D派出的第k量邮车的邮路含有Z_i\to Z_j这段邮路；\\0,若市区D派出的第k量邮车的邮路不含Z_i\to Z_j这段邮路\end{cases}$$

$$f_\lambda(i,j,k)=\begin{cases}1,若县局X_{\lambda-73}派出的第k量邮车的邮路含有Z_i\to Z_j这段邮路；\\0,若县局X_{\lambda-73}派出的第k量邮车的邮路不含Z_i\to Z_j这段邮路\end{cases}$$

3.3 模型的建立与求解

3.3.1 挖掘隐含条件并建立模型

如下时间轴所示：



设市局第一班车在 t_1 时刻出发，t_2 时刻到达县局 X_1，t_3 时刻返回到市局；市局第二班车在 t_4 时刻出发，t_5 时刻到达县局 X_1，t_6 时刻返回到市局。注意到市局两班车的行使路线是完全相同的，则有 t_1 到 t_2 时间加 t_5 到 t_6 的时间恰等于市局车从出发到回到市局的时间。从 t_2 到 t_5 这段时间，县局 X_1 要完成集中处理邮件、派县级车出去并返回、集中处理邮件的工作。所以有：
市局车从出发到回到市局的时间+处理邮件的 2 小时+县级车从出发到回到市局的时间≤12 小时（早晨 6 点到下午 18 点）。这就是下面模型中最后一个式子的由

来。

3.3.2 模型建立

建立规划模型为：

$$\min k$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_k \delta_k^j(\lambda) \ge 1 \qquad \forall j, \quad \forall \lambda = 74,\cdots,78; & (2-1)\\ \sum_k \delta_k^j \ge 1 \qquad \forall j; & (2-2)\\ \sum_i f(i,j,k) = \sum_j f(i,j,k) \qquad \forall k; & (2-3)\\ \sum_i f_\lambda(i,j,k) = \sum_j f_\lambda(i,j,k) \qquad \forall k, \quad \forall \lambda = 74,\cdots,78; & (2-4)\\ \dfrac{\sum_{i,j} f(i,j,k)X_{ij}}{65} + \sum_{j=58}^{74}\delta_k^j * \dfrac{1}{12} + \sum_{j=74}^{78}\delta_k^j * \dfrac{1}{6} \le 5; & (2-5)\\ \dfrac{\sum_{i,j} f(i,j,k)X_{ij}}{65} + 2 + \sum_{j=58}^{74}\delta_k^j * \dfrac{1}{12} + \sum_{j=74}^{78}\delta_k^j * \dfrac{1}{6} + \sum_{\lambda=74}^{78}\sum_j \delta_k^j(\lambda) * \dfrac{1}{12} & (2-6)\\ + \dfrac{\sum_{i,j} f_\lambda(i,j,\gamma)X_{ij}}{30} \le 12, \quad \begin{matrix}\forall k, \forall \gamma\\ \forall \lambda = 74,\cdots,78\end{matrix} & \end{cases}$$

这里（2-1）式表示各个县内的每个支局要被县级车访问到；（2-2）式表示市区内的支局和 5 各县局要被市局车访问到；（2-3）、（2-4）式表示每个地点车辆进入还会再驶出。（2-5）式表示市局发出的车要满足 6 点以后发出，11 点以前返回市局的要求。（2-6）式表示我们所分析的隐含条件。

3.3.3 模型求解

由于此模型的条件众多且错综复杂，使得要想全局的给出一个模型而达到最优解是很困难的，所以我们分如下若干步骤来寻找最优解。首先，我们对各个县局派出邮车的数量与总邮路及耗时的情况进行分析和评价。第二步，我们把市局 D 及县局 $X_i,(i=1,......,5)$ 作为一个系统按照问题一中模型的方法，求解从市局 D 需要发出多少车及如何安排邮车（答案不唯一）。第三，我们把第二步求得的解和第一步中各个县的情况相结合，分析、验证看哪些解满足全部的约束条件，再从中找出最优解。下面分三个步骤进行求解，首先给出两个定义：

定义 1：我们称县 X1 派出的所有邮车走的总邮路的公里数为县 X1 邮政运输网的总邮路数，简称为总邮路，设 n 辆车的邮路数分别为 $c_1, c_{2,}......c_n$，则总邮路

$$c = \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

定义 2：我们称县 X1 派出的各个邮车行使时间的最大值为县 X1 邮政运输网的耗时量，简称为耗时量。即耗时量$T=\dfrac{\max\limits_{1\le i\le n} c_i}{30}$.

A. 研究各县邮车数与总邮路耗时量关系

利用 Dijkstra 最短路径法、Clark-Wright 算法及循环程序，我们可以知道在某县如果只有 1（或 2、3、4）辆车时，邮路的公里数和所耗时间的信息。制作表格如下：

注：因为在车数确定的时候邮路仍有很多选择，我们在同一车辆数的不同调度方案中依照如下原则选择数据：a. 如果某个方案使得总邮路和耗时量为最小，则选取这个方案的数据填入表中。b. 如果某个方案使得总邮路为最小，而它的耗时量和其他方案的耗时量相比变化不大，则选取这个方案。 c. 如果某个方案使得总邮路为最小，而它的耗时量和其他方案的耗时量相比变化很大时，经过权衡比较选择方案。

表 2-2 县 X1 派邮车数量与邮路公里数关系表

邮路（km）	1 辆车时	2 辆车时	3 辆车时	4 辆车时
第 1 辆车邮路	313	151	106	90
第 2 辆车邮路		159	105	100
第 3 辆车邮路			109	109
第 4 辆车邮路				69
总邮路	313	310	320	368
耗时量	313/30＝10 小时 26 分钟	159/30＝5 小时 18 分钟	109/30＝3 小时 38 分钟	109/30＝3 小时 38 分钟

分析：当只利用 1 辆车时，则这辆车的邮路会高达 300 公里以上，耗时量达到 10 小时多，显然这样是不符合实际要求的；当利用 2 辆车时，每辆车的总邮路都不会超过 160 公里，这在实际中是合理的；3 辆车时，耗时量较 2 辆车有大幅度减小；4 辆车较 3 辆车显然后者更优。所以县 X1，2 或 3 辆车是比较优的解。

表 2-3 县 X2 派邮车数量与邮路公里数关系表

邮路（km）	1 辆车时	2 辆车时	3 辆车时	4 辆车时
第 1 辆车邮路	227	167	141	99
第 2 辆车邮路		76	107	89
第 3 辆车邮路			58	107
第 4 辆车邮路				59
总邮路	227	243	306	354
耗时量	227/30＝7 小时 34 分钟	167/30＝5 小时 34 分钟	141/30＝4 小时 42 分钟	107/30＝3 小时 34 分钟

分析：类似理由，我们可知 2 或 3 辆车是较优的解。4 辆车时，耗时数有较大的改善，但代价（多一辆车）较高，我们称其为次优的解。

表 2-4 县 X3 派邮车数量与邮路公里数关系表

邮路（km）	1 辆车时	2 辆车时	3 辆车时	4 辆车时
第 1 辆车邮路	176	134	120	94

第 2 辆车邮路		68	68	68
第 3 辆车邮路			62	52
第 4 辆车邮路				62
总邮路	176	202	250	276
耗时量	176/30＝5 小时 52 分钟	134/30＝4 小时 28 分钟	120/30＝4 小时	94/30＝3 小时 8 分钟

分析：同理可知，2 辆车为优解，1 或 3 辆车为次优解。

表 2-5 县 X4 派邮车数量与邮路公里数关系表

邮路（km）	1 辆车时	2 辆车时	3 辆车时	4 辆车时
第 1 辆车邮路	273	187	148	109
第 2 辆车邮路		86	80	103
第 3 辆车邮路			86	71
第 4 辆车邮路				56
总邮路	273	273	314	339
耗时量	273/30＝9 小时 6 分钟	187/30＝6 小时 6 分钟	148/30＝4 小时 56 分钟	109/30＝3 小时 38 分钟

分析：依同理知，3 辆车是优解，2 或 4 辆车是次优解。

表 2-6 县 X5 派邮车数量与邮路公里数关系表

邮路（km）	1 辆车时	2 辆车时	3 辆车时	4 辆车时
第 1 辆车邮路	301	164	153	132
第 2 辆车邮路		164	132	136
第 3 辆车邮路			129	107
第 4 辆车邮路				72
总邮路	301	328	414	447
耗时量	301/30＝10 小时 2 分钟	164/30＝5 小时 37 分钟	153/30＝5 小时 6 分钟	136/30＝4 小时 32 分钟

分析：依同理知，2 或 3 辆车是优解，4 辆车是次优解。

B. 局部规划求解

把市局 D，县局 $X_i,(i=1,......,5)$ 及该地市附近的十六个支局 Z_i $(i=58,59,\cdots 73)$作为一个骨干网，如图 2-1 所示。

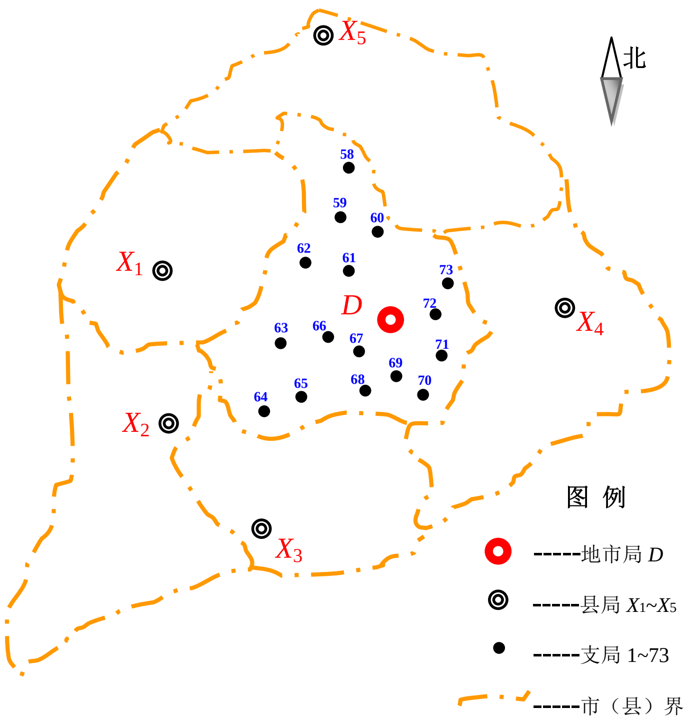


图 2-1 该地区邮政骨干网

按照问题一中模型的方法，求解从市局 D 需要发出多少车及如何安排邮车。通过利用程序（见附录），可以求得有下面 7 组解：

解 1 四辆车

	有经过的邮局	总邮路（km）
第一辆车的邮路	$Z_{67},Z_{64},X_2,X_3,Z_{65},Z_{63},Z_{66}$	269
第二辆车的邮路	$Z_{60},Z_{59},X_5,Z_{58},Z_{61}$	263
第三辆车的邮路	X_1,Z_{62}	184
第四辆车的邮路	$Z_{72},X_4,Z_{73},Z_{71},Z_{69},Z_{70},Z_{68}$	236

解 2 四辆车

	有经过的邮局	总邮路（km）
第一辆车的邮路	$Z_{67},Z_{64},X_2,X_3,Z_{65},Z_{68}$	266
第二辆车的邮路	$Z_{60},Z_{59},X_5,Z_{58},Z_{61}$	263
第三辆车的邮路	Z_{66},Z_{63},X_1,Z_{62}	203
第四辆车的邮路	$Z_{69},Z_{70},Z_{71},Z_{72},X_4,Z_{73}$	197

解 3 四辆车

	有经过的邮局	总邮路（km）
第一辆车的邮路	$Z_{64}, X_2, X_3, Z_{65}, Z_{67}$	254
第二辆车的邮路	$Z_{60}, Z_{59}, X_5, Z_{58}, Z_{61}$	263
第三辆车的邮路	$Z_{66}, Z_{63}, X_1, Z_{62}$	203
第四辆车的邮路	$Z_{72}, X_4, Z_{73}, Z_{71}, Z_{69}, Z_{70}, Z_{68}$	236

解 4 四辆车

	有经过的邮局	总邮路（km）
第一辆车的邮路	$Z_{64}, X_2, X_3, Z_{65}, Z_{67}$	254
第二辆车的邮路	$Z_{61}, Z_{59}, X_5, Z_{58},$	248
第三辆车的邮路	$Z_{66}, Z_{63} X_1, Z_{62}, Z_{60}$	239
第四辆车的邮路	$Z_{72}, X_4, Z_{73}, Z_{71}, Z_{69}, Z_{70}, Z_{68}$	236

解 5 五辆车

	有经过的邮局	总邮路（km）
第一辆车的邮路	X_2, X_3, Z_{65}, Z_{67}	244
第二辆车的邮路	X_5, Z_{58}, Z_{61}	248
第三辆车的邮路	$X_1, Z_{62}, Z_{59}, Z_{60}$	233
第四辆车的邮路	$Z_{71}, Z_{69}, Z_{70}, Z_{68}, Z_{66}, Z_{63}, Z_{64}$	211
第五辆车的邮路	Z_{72}, X_4, Z_{73}	144

解 6 五辆车

	有经过的邮局	总邮路（km）
第一辆车的邮路	Z_{67}, Z_{64}, X_2, X_3	251
第二辆车的邮路	X_5, Z_{58}, Z_{61}	248
第三辆车的邮路	$Z_{66}, Z_{63}, Z_{65}, Z_{68}, Z_{69}, Z_{70}, Z_{71}$	154

第四辆车的邮路	$X_1, Z_{62}, Z_{59}, Z_{60}$	233
第五辆车的邮路	Z_{72}, X_4, Z_{73}	144

解 7 五辆车

	有经过的邮局	总邮路（km）
第一辆车的邮路	$Z_{67}, Z_{64}, X_2, X_3, Z_{64}$	253
第二辆车的邮路	X_5, Z_{58}, Z_{61}	248
第三辆车的邮路	$Z_{66}, Z_{63}, Z_{65}, Z_{69}, Z_{70}, Z_{71}$	149
第四辆车的邮路	$X_1, Z_{67}, Z_{59}, Z_{60}$	233
第五辆车的邮路	Z_{72}, X_4, Z_{73}	144

C．确定可行解并找出最优解

现在我们把第二步中求得的解与第一问中各个县的具体情况相结合，验证看是否满足我们的时限要求，即验证是否满足我们模型中的式子（2－5），（2－6）：

$$
s.t.\begin{cases}
\dfrac{\sum\limits_{i,j} f(i,j,k)X_{ij}}{65}+\sum\limits_{j=58}^{74}\delta_k^j*\dfrac{1}{12}+\sum\limits_{j=74}^{78}\delta_k^j*\dfrac{1}{6}\le 5 \\
\dfrac{\sum\limits_{i,j} f(i,j,k)X_{ij}}{65}+2+\sum\limits_{j=58}^{74}\delta_k^j*\dfrac{1}{12}+\sum\limits_{j=74}^{78}\delta_k^j*\dfrac{1}{6}+\sum\limits_{\lambda=74}^{78}\sum\limits_{j}\delta_k^j(\lambda)*\dfrac{1}{12} \\
+\dfrac{\sum\limits_{i,j} f_\lambda(i,j,\gamma)X_{ij}}{30}\le 12, \qquad \begin{matrix}\forall k,\forall\gamma \\ \forall\lambda=74,\cdots,78\end{matrix}.
\end{cases}
$$

例如，第一组解中第一辆车得邮路要经过邮局 $Z_{67}, Z_{64}, X_2, X_3, Z_{65}, Z_{63}, Z_{66}$（2 个县局 5 个支局），且它的总邮路为 269km，取 X_2 县为 1 辆车，则时间限制为：

$269/65+2\times\dfrac{1}{6}+5\times\dfrac{1}{12}=4.89$ 小时 ≤ 5 小时（最早 6 点出车，中午 11 点前赶回）

和 $269/65+2\times\dfrac{1}{6}+5\times\dfrac{1}{12}+227/30+10\times\dfrac{1}{12}=13.23$ 小时 >12 小时，所以这个解是不满足时限要求的，不是可行解。

依照上述方法，对各个解及各县 4 中车辆数进行组合配对，验证后得表格如下：

解 1				
	1	2	3	4
X1	N	Y	Y	Y
X2	N	N	Y	Y
X3	N	Y	Y	Y
X4	N	N	Y	Y
X5	N	N	Y	Y

解 2				
	1	2	3	4
X1	N	Y	Y	Y
X2	N	N	Y	Y
X3	N	Y	Y	Y
X4	N	Y	Y	Y
X5	N	N	Y	Y

解 3				
	1	2	3	4
X1	N	Y	Y	Y
X2	N	N	Y	Y
X3	N	Y	Y	Y
X4	N	N	Y	Y
X5	N	N	Y	Y

解 4				
	1	2	3	4
X1	N	Y	Y	Y
X2	N	N	Y	Y
X3	N	Y	Y	Y
X4	N	N	Y	Y
X5	N	Y	Y	Y

解 5				
	1	2	3	4
X1	N	Y	Y	Y
X2	N	Y	Y	Y
X3	N	Y	Y	Y
X4	N	Y	Y	Y
X5	N	Y	Y	Y

解 6				
	1	2	3	4
X1	N	Y	Y	Y
X2	N	N	Y	Y
X3	N	Y	Y	Y
X4	N	Y	Y	Y
X5	N	Y	Y	Y

解 7				
	1	2	3	4
X1	N	Y	Y	Y
X2	N	N	Y	Y
X3	N	Y	Y	Y
X4	N	Y	Y	Y
X5	N	Y	Y	Y

这里 1，2，3，4 表示分别使用 1，2，3，4 辆车，Y（Yes）表示满足时限要求， N（No）表示不满足时限要求。

再在每组解中选出使得全市（包括市局 D 和各县局）调用车辆最小的方案如下：

	X1	X2	X3	X4	X5	总车辆	总邮路
解 1	2	3	2	3	3	17	2498
解 2	2	3	2	2	3	16	2434
解 3	2	3	2	3	3	17	2502
解 4	2	3	2	3	2	16	2437
解 5	2	2	2	2	2	15	2436
解 6	2	3	2	2	2	16	2449
解 7	2	3	2	2	2	16	2446

由表中数据知各个解的总路程变化数值不大，所以我们选解 5 为最优解，即市局派出 5 辆车，各县各派 2 辆车，总车辆数是 15，总邮路数（包括全部 15 辆车的）是 2436km ，总运行成本 7308 元。

调度方案如下：

早晨 6：00 从市局派出 5 辆车，行使路线如下：

第一辆：$D \to X_2 \to X_3 \to Z_{65} \to Z_{67} \to D$；

第二辆：$D \to X_5 \to Z_{58} \to Z_{61} \to D$；

第三辆：$D \to X_1 \to Z_{62} \to Z_{59} \to Z_{60} \to D$；

第四辆：$D \to Z_{71} \to Z_{69} \to Z_{70} \to Z_{68} \to Z_{66} \to Z_{63} \to Z_{64} \to D$；

第五辆：$D \to Z_{72} \to X_4 \to Z_{73} \to D$.

市局第二次派车时间约为下午 13 点 45 分，派出 5 辆车，行使路线同上。
因为 D 到达县局 X1 的时间约为 7 点 25 分，经过 1 小时的集中处理，所以县局 X1 大约在早晨 8 点 25 分左右派出县级 2 辆邮车，其行使路线为：

第一辆：$X_1 \to Z_3 \to Z_2 \to Z_5 \to Z_6 \to Z_7 \to Z_8 \to Z_9 \to Z_{10} \to Z_{11} \to Z_4 \to X_1$；

第二辆：$X_1 \to Z_{13} \to Z_{12} \to Z_{11} \to Z_{15} \to Z_{16} \to Z_{14} \to X_1$。

因为 D 到达县局 X2 的时间约为 7 点 23 分，经过 1 小时的集中处理，所以县局 X2 大约在早晨 8 点 23 分左右派出县级 2 辆邮车，其行使路线为：

第一辆：$X_2 \to Z_{21} \to Z_{22} \to Z_{23} \to Z_{24} \to Z_{25} \to Z_{26} \to Z_{20} \to Z_{19} \to X_2$；

第二辆：$X_2 \to Z_{17} \to Z_{18} \to X_2$。

因为 D 到达县局 X3 的时间约为 8 点 23 分，经过 1 小时的集中处理，所以县局 X3 大约在早晨 9 点 23 分左右派出县级 2 辆邮车，其行使路线为：

第一辆：$X_3 \to Z_{28} \to Z_{31} \to Z_{29} \to Z_{30} \to Z_{32} \to Z_{33} \to X_3$；

第二辆：$X_3 \to Z_{27} \to X_3$。

因为 D 到达县局 X4 的时间约为 7 点 23 分，经过 1 小时的集中处理，所以县局 X4 大约在早晨 8 点 23 分左右派出县级 2 辆邮车，其行使路线为：

第一辆：$X_4 \to Z_{36} \to Z_{34} \to Z_{35} \to Z_{37} \to Z_{38} \to Z_{39} \to Z_{40} \to X_4$；

第二辆：$X_4 \to Z_{41} \to Z_{42} \to Z_{43} \to X_4$。

因为 D 到达县局 X5 的时间约为 7 点 55 分，经过 1 小时的集中处理，所以县局 X5 大约在早晨 8 点 55 分左右派出县级 2 辆邮车，其行使路线为：

第一辆：$X_5 \to Z_{51} \to Z_{46} \to Z_{44} \to Z_{45} \to Z_{47} \to Z_{48} \to Z_{49} \to Z_{50} \to X_5$；

第二辆：$X_5 \to Z_{54} \to Z_{55} \to Z_{56} \to Z_{57} \to Z_{52} \to Z_{53} \to X_5$。

参考文献：

[1] 程录庆，胡涛.车辆路由问题在邮路规划中的应用研究[J].中国信息管理化，2006，9(1),14-15

[2] 王文波.数学建模及其基础知识详细解[M].武汉大学出版社，2006年5月

[3] Matlab语言在运筹学中的应用[M].湖南大学出版社,2005年5月

[4] 林健良，黄培伦，邝英强等. 邮政运输网路中的几个优化数学模型[J],华南理工大学学报(自然科学版).2006,28(8),6-10